# ZUR APPROXIMATION DES TRANSFINITEN DURCHMESSERS BEI BIS AUF ECKEN ANALYTISCHEN GESCHLOSSENEN JORDANKURVEN

VON

KLAUS MENKE

ABSTRACT

Let $C$ be a closed Jordan curve in the complex plane and let $f(z) = dz + a_0 + a_1 z^{-1} + \cdots$ be the analytic function mapping $|z| > 1$ schlicht onto the exterior of $C$ ($d > 0$ is the transfinite diameter of $C$). Similar to the Fekete points a point system will be defined called *extremal points*. One can use the Fekete points or the extremal points to approximate $d$. The author has proved [3] that in the case of an analytic closed Jordan curve the approximation of $d$ by means of extremal points is much better than the approximation of $d$ by the use of Fekete points. Here we show how to approximate $d$ by means of extremal points in the case of a piecewise analytic, closed Jordan curve possessing corners of opening $\alpha\pi$ $(0 < \alpha < 2)$.

## 1.

Sei $C$ eine geschlossene Jordankurve mit dem transfiniten Durchmesser $d$. Seien $a, b, c$ drei verschiedene Punkte auf $C$. Dann bedeute $a \prec b \prec c$, dass man beim Durchlaufen der Kurve im positiven Umlaufsinn ausgehend von $a$ zunächst auf $b$ and dann auf $c$ trifft. Sei $R_n = R_n(C)$ der grösste Wert, den der absolute Betrag des Produktes $R(z_1, \cdots, z_n, w_1, \cdots, w_n) = \prod_{k=1}^{n} \prod_{j=1}^{n} (z_k - w_j)$ annimmt, wenn die Punkte $z_1, \cdots, z_n, w_1, \cdots, w_n$ unter der Einschränkung $z_k \prec w_k \prec z_{k+1}$ $(k = 1, \cdots, n-1)$ und $z_n \prec w_n \prec z_1$ alle Punkte von $C$ durchlaufen. Wenn $|R(z_{n1}, \cdots, z_{nn}, w_{n1}, \cdots, w_{nn})| = R_n$ ist, so heissen $z_{n1}, \cdots, z_{nn}, w_{n1}, \cdots, w_{nn}$ $n$te Extremalpunkte und $R_n$ heisst $n$te Resultante von $C$.

Sei $w = f(z) = dz + a_0 + a_1 z^{-1} + \cdots$ die analytische Funktion, die $|z| > 1$ schlicht auf das Äussere von $C$ abbildet; hierbei ist $d > 0$ der transfinite Durch-

Received April 15, 1973

messer von $C$. Die Extremalpunkte sind ähnlich erklärt wie die Fekete-Punkte (vergleiche hierzu Fekete [1]). Wichtige Aussagen über Abschätzungen der $n$ten Diskriminante und über die asymptotische Verteilungen der Fekete-Punkte stammen von Pommerenke [5], [6], [7]. Im Falle analytischer geschlossener Jordankurven besitzen die Extremalpunkte aber wesentlich bessere Eigenschaften als die Fekete-Punkte (bergleiche hierzu [3]). Speziell gilt im Falle analytischer geschlossener Jordankurven mit dem transfiniten Durchmesser $d$:

$$R_n(C) = 2^n \cdot d^{n^2} \cdot (1 + O(r^n)), \quad (0 < r < 1), \quad (n \to \infty). \tag{1.1}$$

(Im Falle einer analytischen Kurve ist $f(z)$ noch für $|z| > R$ mit einem geeigneten $R < 1$ analytisch und schlicht; von diesem $R$ hängt $r$ ab.) Weiter wurde gezeigt, dass für jede geschlossene Jordankurve mit dem transfiniten Durchmesser $d$ gilt:

$$R_n(C) \geqq 2^n \cdot d^{n^2}. \tag{1.2}$$

Wir wenden uns nun dem für die Anwendungen wichtigen Fall stückweiser analytischer geschlossener Jordankurven zu und beweisen:

SATZ. *Sei $C$ eine geschlossene Jordankurve, die sich aus $m$ analytischen Bögen zusammensetzt, die bei ihrem Zusammentreffen Ecken mit den Innenwinkeln $\alpha\pi$ bilden* $(0 < \alpha < 2)$. *Sei $d$ der transfinite Durchmesser von $C$. Dann gilt:*

$$R_n(C) \leqq M^n \cdot n^n \cdot d^{n^2} \tag{1.3}$$

*wobei $M$ eine positive Konstante ist, die nicht von $n$, sondern nur von $C$ (und damit von $m$) abhängt.*

Hieraus folgt unter denselben Voraussetzungen wie im obigen Satz wegen (1.2):

KOROLLAR. *Es gilt:* $\lim_{n\to\infty} R_n^{1/n^2} = d$.

**2.**

Für $r > 0$ gilt: $R_n(rC =) r^{n^2} \cdot R_n(C)$. Es genügt daher, sich bei den Untersuchungen von $R_n(C)$ auf den Fall von Kurven mit dem transfiniten Durchmesser $d = 1$ zu befassen.

Wir können $C$ in der folgeneden Parameterdarstellung $w = w(t)$ $(0 \leqq t \leqq L)$ annehmen, wobei $t$ die Bogenlänge bedeutet and $L$die Länge von $C$ ist: $w(t) = g_j(t)$ für $r_j \leqq t \leqq r_{j+1}$ $(j = 1, \cdots, m-1)$, $r_0 = 0$. $r_m = L$, $w(r_j)$ sind die Eckpunkte, es ist $g_j(t)$ für $r_j < t < r_{j+1}$ eine analytische Funktion mit $g'_j(t) \neq 0$ and für $|t - r_p| < \rho_p$ $(p = j, j+1)$ mit hinreichen kleinem $\rho_p$ gilt:

$$g_j(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k^{(j)}(t-r_j)^k, \; b_1^{(j)} \neq 0, \; g_j(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(j)}(t-r_{j+1})^k \; c_1^{(j)} \neq 0.$$

Sei $C_k = \{w(t): r_k \leqq t < r_{k+1}\}$, $I = t\{0 \leqq t \leqq L\}$. Weiter setzen wir $w(t+L): = w(t)$ für $t \in I$. Wir zeigen nun:

LEMMA. *Es gibt eine Zahl $r = r(C)$, so dass zu jedem $s \in I$ Parameterwerte $p_1, \cdots, p_r$ aus $I$ existieren mit $p_1 < p_2 < \cdots < p_r < p_1 + L$, so dass $|w(s) - w(t)|$ für $p_j \leqq t \leqq p_{j+1}$ $(j = 1, \cdots, r-1)$ und für $p_r \leqq t \leqq p_1 + L$ eine monotone Funktion ist.*

BEWEIS. Sei zunächst $s$ fest. Dann ist klar, dass man mit endlich vielen Parameterwerten auskommt, um das Intervall $I$ so in Teilintervalle zu zerlegen, dass $h(s,t): = |w(s) - w(t)|^2$ in jedem Intervall monoton ist. Angenommen, das wäre nicht der Fall, so würde $(\partial/\partial t)\, h(s,t) = 0$ sein in unendlich vielen verschiedenen Werten $h_n$ aus $I$ $(n = 1, 2, \cdots)$.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit (OBDA), gelte $\lim_{n\to\infty} h_n = h_0$. Ist $w(h_0)$ ein Eckpunkt, also $h_0 = r_k$ für ein $k$, so können wir OBDA annehmen $w(h_n) \in C_k$ für alle $n$. Für $r_k \leqq t \leqq r_{k+1}$ ist $h(s,t) = |w(s) - g_k(t)|^2$, also ist $h(s,t)$ eine reell-analytische Funktion auch noch in einer Umgebung von $h_0$. Damit folgt $h(s,t) =$ konstante, also ist $h(s,t)$ monoton für $r_k \leqq t \leqq r_{k+1}$, was im Widerspruch zu unserer Annahme steht. Im Falle, dass $w(h_0)$ kein Eckpunkt ist, verläuft der Beweis analog.

Nehmen wir nun an, die Behauptung im obigen Lemma sei falsch, das heisst, also: Zu jedem $n$ gibt es ein $s_n$, für das wir (mindestens) $n$ Parameter $p_1^{(n)}, \cdots, p_n^{(n)}$ benötigen, um $I$ so in Intervalle zu zerlegen, dass $h(s,t)$ in jedem Intervall monoton ist.

OBDA können wir annehmen, dass all $p_j^{(n)}$ $(j = 1, \cdots, n;\, n = 1, 2 \cdots)$ auf einem Bogen, etwa $C_p$ liegen (sonst Übergang zu Teilfolgen von $s_n$). Weiter können wir OBDA annehmen $\lim_{n\to\infty} s_n = s_0$ and dass $s_0, s_n$ für alle $n$ auf einem Bogen etwa $C_q$ liegen. Für $r_p \leqq t \leqq r_{p+1}, r_q \leqq s \leqq r_{q+1}$ gilt nun $h(s,t) = |g_p(t) - g_q(s)|^2$. Sei $r_p \leqq t_0 \leqq r_{p+1}$, in einer Umgebung von $(s_0, t_0)$ gilt die Potenzreihenentwicklung $h(s,t) = a_0(s) + a_1(s)(t-t_0) + a_2(s)(t-t_0)^2 + \cdots$.

Sei $l \geqq 1$ die kleinste ganze Zahl, für die $a_l(s_0) \neq 0$ ist. Eine derartige Zahl $l$

existiert immer, denn andernfalls wäre $h(s_0, t) \equiv a_0(s_0)$ für alle $t$ aus einem hinreichend kleinen Intervall $I_0$. Da $C_p$ ein analytischer Bogen ist, ist $C_p$ ein Kreisbogen um $w(s_0)$ mit dem Radius $a_0(s_0)^{\frac{1}{2}}$. In diesem Fall sieht man durch elementargeometrische Überlegungen leicht ein, dass dies im Widerspruch zu unserer Annahme steht.

Wir verkleinern nun die Umgebung von $(s_0, t_0)$ auf ein so kleines Quadrat $Q$ mit dem Mittelpunkt $(s_0, t_0)$, so dass für $(s, t) \in Q$ gilt:

$$(\partial^l/\partial t^l)\, h(s,t) = l!a_l(s) + (l+1)!a_{l+1}(s)(t-t_0) + \cdots \neq 0;$$

dies ist ja möglich, da $a_l(s_0) \neq 0$ ist.

Nun entwickeln wir die Funktion $h(s, t)$ für $r_p \leqq t \leqq r_{p+1}$ um jeden Punkt $(s_0, t)$ in ihre Potenzreihe. Dabei überdecken endlich viele der eben beschriebenen Umgebungsquadrate einen hinreichen schmalen Streifen $St = \{(s,t): |s-s_0| < \varepsilon, r_q \leqq s \leqq r_{q+1}, r_p \leqq t \leqq r_{p+1}\}$. Es mögen etwa die $h$ Quadrate $Q_j$ mit den Mittelpunkten $(s_0, t_j)$ diesen Streifen überdecken. Die Potenzreihenentwicklungen von $h(s, t)$ in den einzelnen Qudraten $Q_j$ seien gegeben durch:

$$h(s,t) = a_0^{(j)}(s) + a_1^{(j)}(s)(t-t_j) + a_2^{(j)}(s)(t-t_j)^2 + \cdots.$$

Für jedes $j$ nennen wir $l^{(j)}$ die kleinste natürliche Zahl, für die $a_l\ (s_0) \neq 0$ ist. Sei weiter $k = \sum_{j=1}^{h} l^{(j)}$. Für jedes $s$ mit $(s, t) \in St$ gilt dann nach dem Satz von Rolle: $(\partial/\partial t)\, h(s, t)$ hat höchstens $k$ Nullstellen für $r_p \leqq t \leqq r_{p+1}$. Sei andererseits $n > k$, sei $n$ weiter so gross, dass $|s_n - s_0| < \varepsilon$, dann hat $(\partial/\partial t)\, h(s_n, t)$ für $r_p \leqq t \leqq r_{p+1}$ mindestens $n$ Nullstellen, was einen Widerspruch darstellt.

## 3.

Wir bezeichnen mit $f(t_1, t_2)$ die Länge desjenigen Teils von $C$, der ausgehend von $w(t_1)$ im positiven Umlaufsinn bis $w(t_2)$ durchlaufen wird. Nun gibt es für unsere Kurve (vergleiche, zum Beispiel, Muschelischwili [4, S. 515], eine positive Konstante $K_0 = K_0(C)\ K_0 < 1$, so dass

$$K_0 \cdot f(t_1, t_2) \leqq |w(t_1) - w(t_2)| \leqq f(t_1, t_2) \tag{3.1}$$

für alle $t_1, t_2 \in I$ ist, sofern $f(t_1, t_2) \leqq L/2$ ist. (Hierbei wird wesentlich benötigt dass es sich bei den Ecken nicht um Spitzen handelt, das heisst, hier ist $0 < \alpha < 2$ notwendig.)

Seien nun $z_k = w(s_k)$, $w_k = w(t_k)$ $(k = 1, \cdots, n)$ $n$te Extremalpunkte, dann gilt $s_1 < t_1 < \cdots < s_n < t_n < s_1 + L$. Wir betracten nun das Produkt $A = \prod_{k=1}^{n} |w(s_j) - w(t_k)|$, $A$ wird in Beziehung gebracht zu dem Produkt $B = \prod_{k=1, k \neq j}^{n} |w(s_j) - w(s_k)|$. Wir demonstrieren unser Vorgehen jetzt für einen Fall, in allen anderen Fällen kann man analog vorgehen.

Sei $v$ die grösste ganze Zahl $j \leqq v \leqq n$ mit $f(s_j, t_v) \leqq L/2$. Es mögen $t_j, s_{j+1}, \cdots, t_p$ $(p \leqq v)$ in einem Intervall liegen, in dem $|w(s_j) - w(t)|$ monoton wachsend ist. Dann ist für $v = j, \cdots, p-1$ $|w(s_j) - w(t_v)| \leqq w(s_j) - w(_{v+1})|$. Im nächsten Intervall (in dem ist also $|w(s_j) - w(t)|$ monoton fallend) mögen $s_{p+1}, \cdots, s_q$ $(q \leqq v)$ liegen. Dann ist $|w(s_j) - w(t_v)| \leqq |w(s_j) - w(s_v)|$ für $v = p+1, \cdots, q-1$. Im folgenden Intervall ist $|w(s_j) - w(t)|$ monoton steigend, in ihm mögen $t_q, \cdots, s_u$ liegen. Damit ist:

$$\prod_{k=j}^{u} |w(s_j) - w(t_k)| \leqq |(w(s_j) - w(t_p)| / |w(s_j) - w(s_q)|) \cdot$$
$$|w(s_j) - w(t_u)| \prod_{k=j+1}^{u} |w(s_j) - w(s_k)|.$$

Der Quotient auf der rechten Seite dieser Ungleichung ist nun nach oben durch eine Konstante $M$ beschränkt, die nicht von $j$, $p$, $q$, $n$ abhängt:

Ist $f(s_j, s_q) \leqq L/4$, so ist der Quotient wegen (3.1) nicht grösser als $16/L \cdot K_0 := K_1$ da $|w(t) - w(s)| \leqq 4$ ist (siehe, zum Beispiel, Golusin [2]) für $s \in I$, $t \in I$. Ist $f(s_j, s_q) < L/4$, so ist wegen $f(s_j, t_p) < f(s_j, s_q)$ der obige Quotient nicht grösser als $K_0^{-1}$. Mit $M = \max(K_1, K_0^{-1})$ folgt also die Behauptung. Insgesamt zeigt man auf diese Weise: $A \leqq (4 \cdot M)^r \cdot B$ und damit

$$R_n(C) \leqq (4 \cdot M)^{rn} \prod_{k}^{n}{}_{\neq} \prod_{j}^{n} |w(s_j) - w(s_k)| \leqq (4 \cdot M)^{rn} \cdot V_n,$$

wobei $V_n$ gerade die $n$te Diskriminante von $C$ ist. Hierfür zeigte Pommerenke [6] im Falle von Kurven beschränkter Drehung (also insbesondere in unserem Fall): $V_n \leqq N^n \cdot n^n$, wobei $N = N(C)$ nicht von $n$ abhängig ist. Damit ist der Satz bewiesen.

Es ist zu vermuten, dass die Abschätzung (1.3) noch erheblich verschärft werden kann.

## Literatur

1. M. Fekete, *Über die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizenten.*, Math. Z. **17** (1923), 228–249.

2. G. M. Golusin, *Geometrische Funktionentheorie*, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1957.

3. K. Menke, *Extremalpunkte und konforme Abbildung*, Math. Ann. **195** (1972), 292–308.

4. N. I. Muschelischwili, *Singuläre Integralgelichungen*, Akademie-Verlag, Berlin, 1965.

5. C. Pommerenke, *Über die Faberschen Polynome schlichter Funktionen*, Math. Z. **85** (1964), 197–208.

6. C. Pommerenke, *Konforme Abbildung und Fekete-Punkte*, Math. Z. **89** (1965), 422–433.

7. C. Pommerenke. *Uber die Verteilung der Fekete-Punkte II*, Math. Ann. **179** (1969), 212–218.

MATHEMATISCHES INSTITUT
UNIVERSITÄT DORTMUND
DORTMUND, WEST GERMANY